Föreläsning 7

Vi ska förklara och utreda hur exponentialfunktionen, logaritmen och potenser växer.

Vi ska göra det genom gränsvärden. Vi behöver först en sats:

Sats (Instängningssatsen)

Antag att $f(x) \le g(x) \le h(x)$ $\forall x \in I \ni a$, förutom möjligen $x = a$.

Antag att

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L.$$

Då gäller att $\lim_{x \to a} g(x) = L$.

Påst 1:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$$

(Dvs x^a växer snabbare än $\ln x$) för $a > 0$.

Bevis:

Låt $x > 1$, $a > 0$ och låt $s = \frac{a}{2}$. Vi har att

$$0 < s \ln x = \ln x^s \le x^s - 1 < x^s$$

Dela med s varvid

$$0 < \ln x < \frac{x^s}{s}$$

Dela med $x^a = x^{2s}$;

$$0 < \frac{\ln x}{x^a} < \frac{x^s}{s x^{2s}} = \frac{1}{s x^s}$$

Då $x \to \infty$ så $\frac{1}{s x^s} \to 0$, ty $s > 0$.

Alltså är

$$0 < \frac{\ln x}{x^a} < 0 \quad \text{då } x \to \infty.$$

Instängningssatsen ger oss att $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$.

<u>Påst 2:</u>

$$\lim_{x \to 0^+} x^a \ln x = 0.$$

<u>Bevis:</u>

Betrakta påst 1, dvs $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$. Sätt $x = 1/t$, varvid då $x \to 0^+$ så $t \to \infty$. Detta ger att

$$\lim_{x \to 0^+} x^a \ln x = \lim_{t \to \infty} \left(\frac{1}{t}\right)^a \ln\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{t \to \infty} \frac{\ln(1/t)}{t^a} =$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{-\ln t}{t^a} = 0 \quad \text{e.l. påst 1.}$$

Påst 3.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0 \quad a>0; \text{ (} e^x \text{ växer snabbare än } x^a\text{)}.$$

Bevis:

Sätt $x = \ln t$, så då $x \to \infty$ så $t \to \infty$. Då är

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{e^x} = \lim_{t\to\infty} \frac{(\ln t)^a}{e^{\ln t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{(\ln t)^a}{t} = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{\ln t}{t^{1/a}}\right)^a \underset{\uparrow}{=} 0^a = 0$$

Påst 2

Påst 4:

$$\lim_{x\to-\infty} |x|^a e^x = 0 \quad , a>0.$$

Bevis:

Sätt $x = -t$, varvid då $x \to -\infty$ så $t \to \infty$. Detta ger att

$$\lim_{x\to-\infty} |x|^a e^x = \lim_{t\to\infty} |-t|^a e^{-t} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^a}{e^t} \underset{\uparrow}{=} 0$$

Påst 3.

Vi ska nu se att vi även kan få e^x genom ett gränsvärde.

Sats:

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Bevis:

Om $x=0$ så är $e^0 = 1$ och $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{0}{n}\right)^n = 1$

Antag nu att $x \neq 0$ och låt $h = \frac{x}{n}$. Då $n \to \infty$ så $h \to 0$.
Vi har att

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} n \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} x \cdot \frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} =$$

$$= x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} \underset{\ln 1 = 0}{=} x \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h}}_{\frac{d}{dt}\ln t\big|_{t=1}} =$$

$$= x \cdot \frac{d}{dt}\ln t\Big|_{t=1} = x \cdot \frac{1}{t}\Big|_{t=1} = x.$$

$\therefore$ $\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = x \iff \ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right) = x$.

Exponentiera nu:

$$e^{\ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)} = e^x$$

$$\iff \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

D.

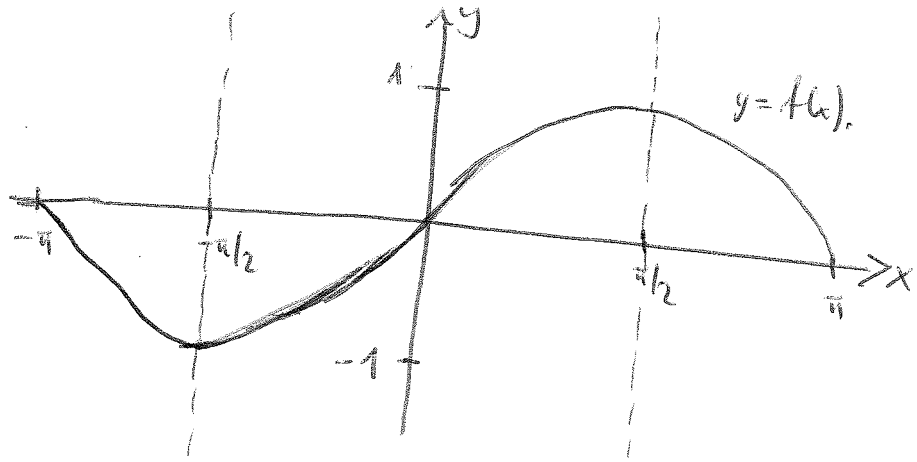
Innan vi ska börja med att lära oss att skissa kurvor så ska vi gå igenom inversa trigonometriska funktioner samt derivator av dessa.

~~Därm~~ Eftersom trigonometriska funktioner är periodiska så är de inte injektiva eller inverterbara. Däremot så kan vi bara kolla på en bit av definitionsområdet för att göra dem injektiva.

Ex:

Kom ihåg från föreläsning 1 att $f(x) = x^2$ inte är injektiv som funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ men injektiv som $[0, \infty) \to \mathbb{R}$

Betrakta $f(x) = \sin(x)$. Dess graf är



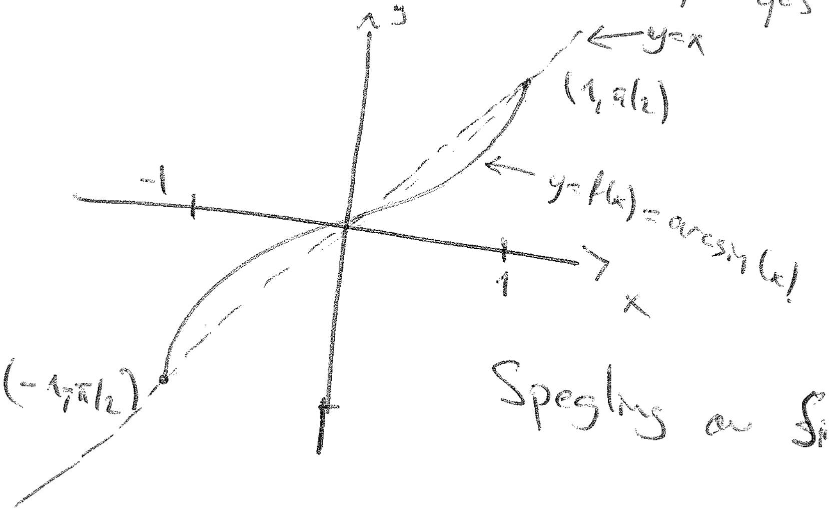
På intervallet $[-\pi/2, \pi/2]$ så är $\sin(x)$ injektiv.

Vi definierar $\operatorname{Sin}(x) = \sin(x)$ för $x \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Vi skriver denna med stort S för att markera att detta inte är hela sin(x).
Detta betyder dock att Sin(x) har en invers
Denna invers skriver vi som arcsin(x). Den uppfyller alltså:

$$y = \arcsin(x) \iff x = \mathrm{Sin}(y) \iff x = \sin(y) \quad y \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Observera att definitionsmängden för arcsin(x) är $[-1, 1]$. Grafen för arcsin(x) ges av



Spegling av Sin(x) i $y=x$.

Eftersom arcsin(x) och Sin(x) är varandras inversers så gäller

$$\arcsin(\mathrm{Sin}(x)) = x \quad \forall x \in [-\pi/2, \pi/2]$$
$$\mathrm{Sin}(\arcsin(x)) = x \quad \forall x \in [-1, 1].$$

Ex:

Betrakta $\arcsin(\sin \frac{4\pi}{5})$. Detta är inte lika med $\frac{4\pi}{5}$ ty $\frac{4\pi}{5} \notin [-\pi/2, \pi/2]$.

Men $\sin \frac{4\pi}{5} = \sin(\pi - \frac{\pi}{5}) = \sin \frac{\pi}{5}$.

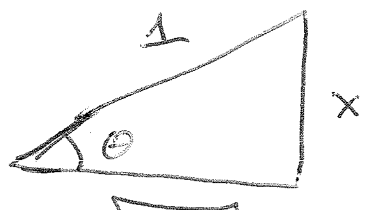
Alltså är

$$\arcsin(\sin \frac{4\pi}{5}) = \arcsin(\sin \frac{\pi}{5}) = \frac{\pi}{5}.$$

Ex:

Vi ska förenkla $\cos(\arcsin(x))$.

Vi vet att $\arcsin(x)$ ger en vinkel, säg vinkeln θ, så $\sin \theta = x$. Detta ger att vi kan rita en triangel:



$\sqrt{1-x^2}$ ← pyth. sats

Pythagoras sats ger att $(\sqrt{1-x^2})^2 + x^2 = 1^2$.

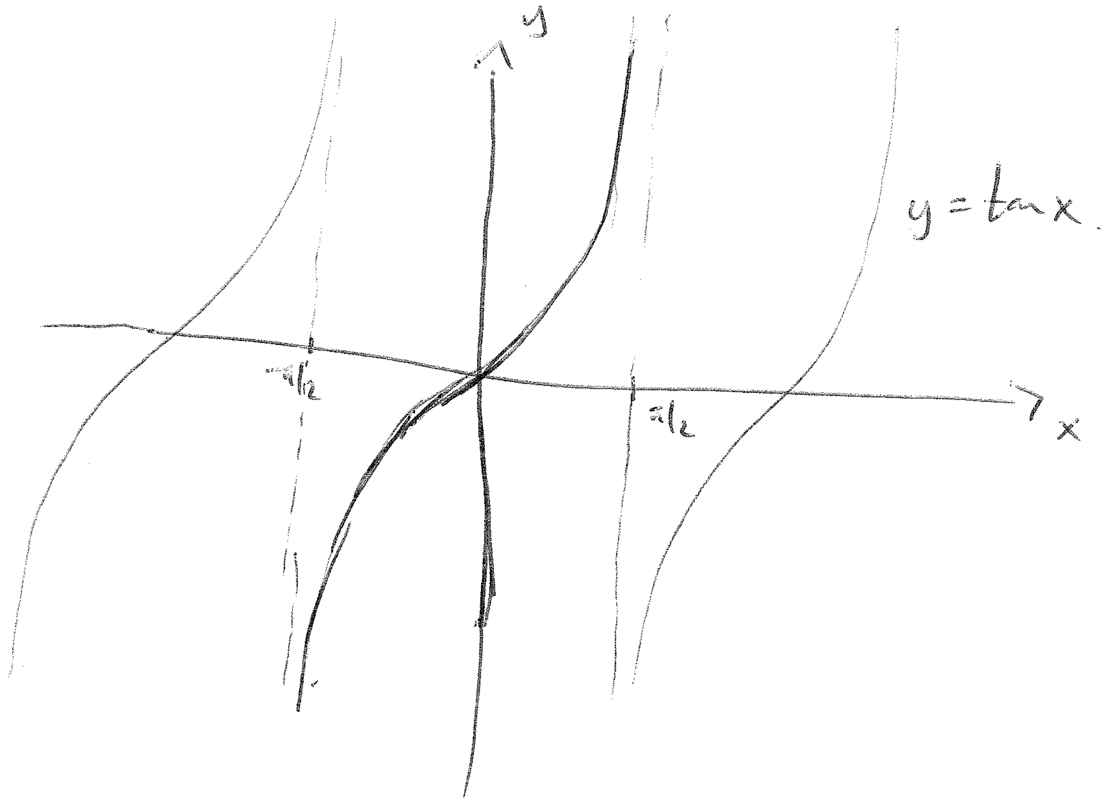
Alltså är $\cos\theta = \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

(8)

Vi fortsätter nu med inversa tangensfunktionen.

Eftersom $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ så är den inte definierad för $\pm\frac{\pi}{2}$ för då är $\cos \pm\frac{\pi}{2} = 0$! (Plus perioderna förstås!)

Om man skisserar $\tan x$ så får man.



Alltså kan vi hitta en invers för $\tan(x)$ på intervallet $(-\pi/2, \pi/2)$.

Observera att detta är ett öppet intervall!!!

Vi definierar

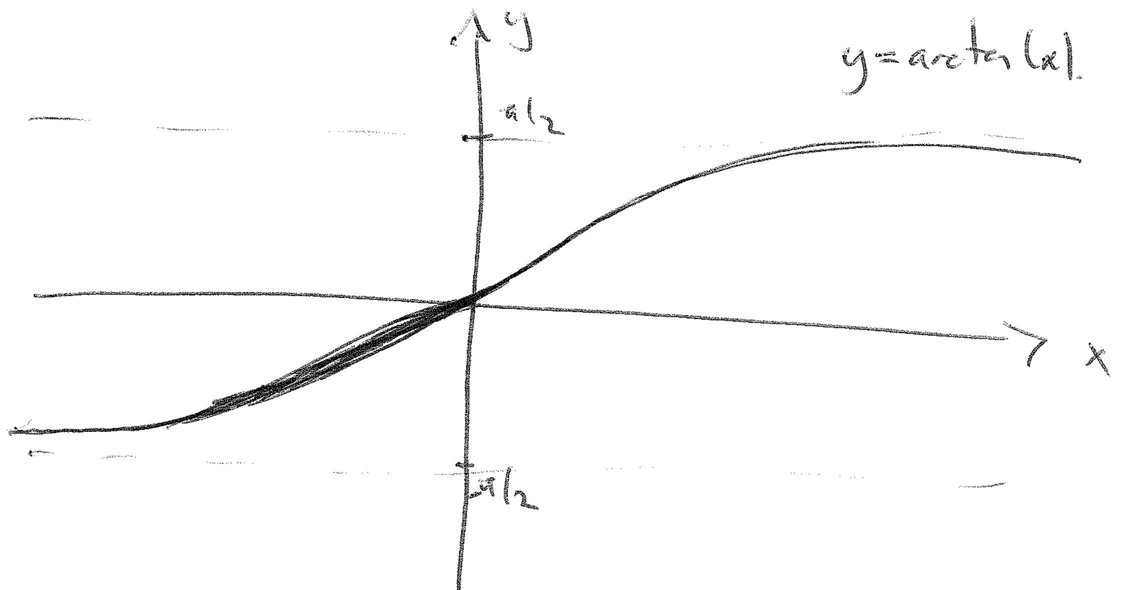
$$\operatorname{Tan}(x) = \tan x \quad \text{för} \ -\pi/2 < x < \pi/2.$$

Stort T!

Den inversa funktionen ges av:

$y = \arctan(x) \iff x = \operatorname{Tan}(y) \iff x = \tan(y), \ y \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Alltså är definitionsmängden för $\arctan(x)$ lika med $(-1, 1)$. Grafen ges som vanligt av spegling kring $y = x$:



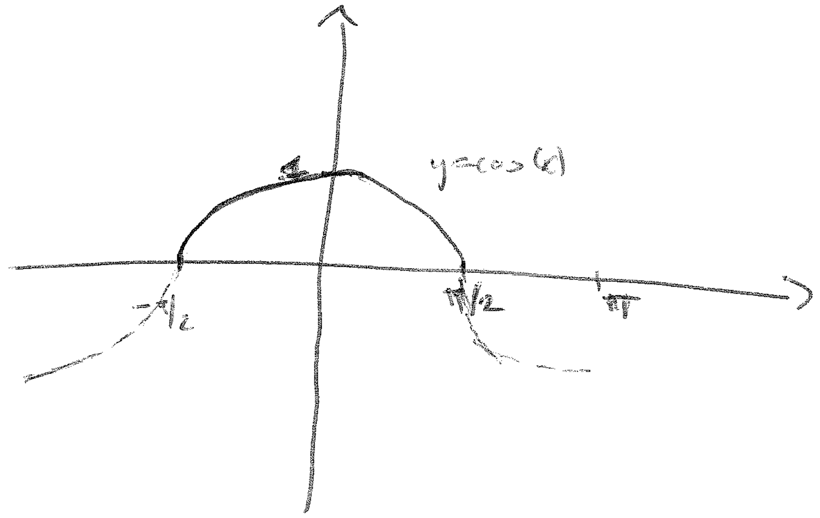
Samma typ av räkningar som med arcsin. Kom ihåg definitionsområdet bara! Observera att

$\arctan(\operatorname{Tan}(x)) = x$ för $x \in (-\pi/2, \pi/2)$

$\operatorname{Tan}(\arctan(x)) = x$ för $x \in (-\infty, \infty)$

Den sista trigonometriska funktionen som vi ska hitta inversen till är $\cos(x)$. Efter detta går vi igenom flera exempel!

Observera att $\cos(x)$ är inte bijektiv på $(-\pi/2, \pi/2)$, den är inte ens injektiv.



Den är däremot injektiv på $[0, \pi]$, och där har den en invers. Däremot så är

$$\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \forall x.$$

För $x \in [0, \pi]$ så är $\frac{\pi}{2} - x \in [-\pi/2, \pi/2]$.
Vi definierar därför

$$y = \arccos(x) \iff x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \iff$$

$$\arcsin(x) = \frac{\pi}{2} - y = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x).$$

Alltså är

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x) \quad \text{för } -1 \leq x \leq 1.$$

Denna funktion är verkligen en invers, ty

$$\arccos(\cos(x)) = x \qquad 0 \leq x \leq \pi$$

och

$$\cos(\arccos(x)) = x \qquad -1 \leq x \leq 1.$$

Ex:

Beräkna $\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan(3)\right)$

Både $\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$ och $\arctan(3)$ ger en vinkel, säg α respektive β.

Enligt additionsformeln för cos så är

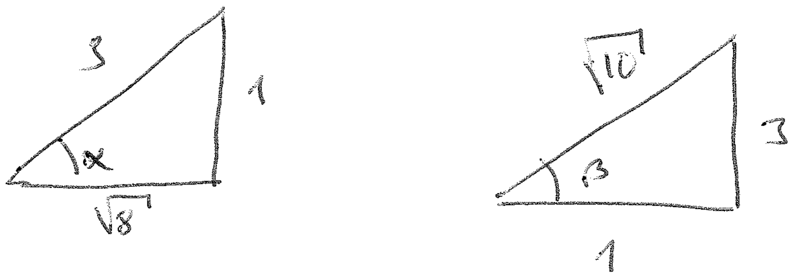
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Vi behöver hitta

$\cos(\alpha) = \cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right)$, $\cos(\beta) = \cos(\arctan(3))$,

$\sin(\alpha) = \sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{3}$ och $\sin(\beta) = \sin(\arctan(3))$.

Vi ritar upp respektive triangel för α och β.



Detta ger att $\cos(\alpha)=\frac{\sqrt{8}}{3}$, $\cos(\beta)=\frac{1}{\sqrt{10}}$ och $\sin(\beta)=\frac{3}{\sqrt{10}}$. Alltså är

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{8}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{8}-3}{3\sqrt{10}}.$$

Så vi har att

$$\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)+\arctan(3)\right)=\frac{\sqrt{8}-3}{3\sqrt{10}}.$$

Ex:

Beräkna $\arctan\frac{1}{2}+\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$.

Detta är två vinklar, säg α och β, så vi vill hitta $\alpha+\beta$. Vi har att

$$\alpha=\arctan\frac{1}{2}\iff\tan\alpha=\frac{1}{2}\quad\text{så}\quad\alpha\in(0,\pi/2)$$

Vidare så är ty $\frac{1}{2}>0$.

$$\beta=\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\iff\cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{10}}\quad\text{så}\quad\beta\in[\pi/2,\pi]$$

ty $\frac{-1}{\sqrt{10}}<0$

Detta ger att

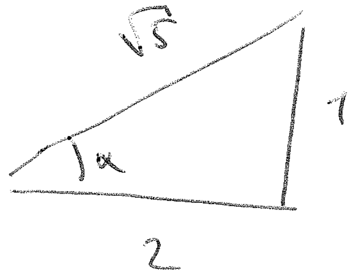
$$\pi < \alpha+\beta < \frac{3\pi}{2}.$$

En additionsformel för tan är på formen

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

Vi börjar med att beräkna $\sin(\alpha), \sin(\beta)$, $\cos(\alpha), \cos(\beta)$.

Vi ställer upp en triangel.



Alltså är $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

och $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Vi måste nu hitta $\sin(\beta)$ och $\cos(\beta)$. Per definition så är $\cos(\beta) = -\frac{1}{\sqrt{10}}$. Vidare så är

$$\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} \Rightarrow \sin\beta = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

ty $\beta \in (\pi/2, \pi)$.

Detta ger nu att

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) + \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}} = \frac{-1+6}{-2-3} = -1$$

Alltså är $\tan(\alpha+\beta) = -1$, så $\alpha+\beta = \frac{3\pi}{4}$.